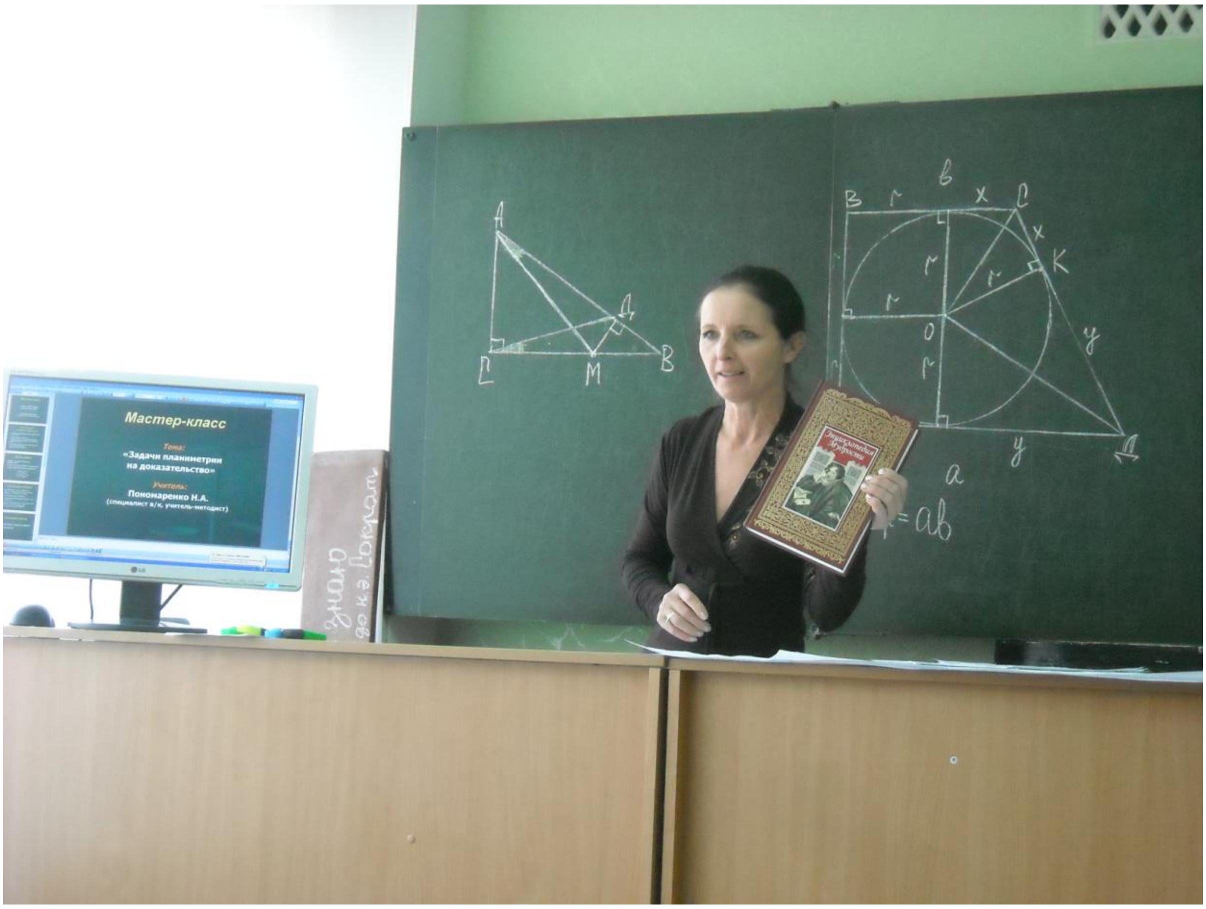
Из опыта работы Пономаренко Н.А.,
учителя математики гимназии № 6 Коммунарского района г.Запорожья



Занятие мастер-класса для учителей математики Коммунарского района «Методы решения планиметрических задач на построение»

Место проведения: *Гимназия №6*
Дата проведения *23октября 2009*

Роль задач в учебном процессе:

- решая задачи, учащиеся учатся применять полученные теоретические знания на практике, выясняют, как именно математические знания используются разными специалистами в жизни;
- решение задач способствует развитию мышления и пространственных представлений, умению анализировать, сопоставлять, строить цепочки логических рассуждений, делать выводы, формировать математические модели;
- решение задач воспитывает у учащихся внимание, силу воли, настойчивость и многие другие полезные качества.

В зависимости от роли в учебном процессе задачи делятся на:

1) задачи с дидактическими функциями;
2) задачи познавательного характера;
3) развивающие задачи.

Различают четыре вида математических задач:

1) на вычисления;
2) на построение;

3) на доказательство;
4) на исследование.

Каждый из указанных видов, в свою очередь, подразделяется еще на многие виды.

Решение каждой математической задачи осуществляется, вообще говоря, по четырем основным этапам:

1) составление плана решения;
2) практическая реализация плана во всех его деталях;
3) окончательное рассмотрение задачи и ее решения с целью усвоения тех моментов, которые могут стать полезными для дальнейшего решения задач.
4) Окончательное рассмотрение задачи и ее решения с целью усвоения тех моментов, которые могут стать полезными для дальнейшего решения задач.

Для выработки правильного понимания школьниками поставленной задачи можно рекомендовать соблюдение следующих требований:

1. Начинайте изучать условия задачи с аккуратно и грамотно выполненных наглядных чертежей. Они не должны быть мелкими, не должны сводить общие случаи к частным; по возможности, должен соблюдаться масштаб, отвечающий реальному соотношению данных величин друг с другом. Правильное графическое представление условия задач означает по существу четкое. Ясное и конкретное представление о всей задачной ситуации в целом и иной раз с первого же взгляда позволяет обнаружить возможные пути решения.

2. Представьте ясно и детально все основное, связанное с данной задачей. Выделите в тексте условия задачи главное и сконцентрируйте на нем свое внимание.

3. Проверьте тщательно каждое выдвигаемое в процессе решения задачи положение контрольными вопросами вида: что это означает, какие имеются основания для данного утверждения, какую пользу можно извлечь из данного факта?

4. Проверьте, однозначно ли сформирована задача. Нет ли в условии избыточных или недостающих данных?

Одним из ведущих вопросов, связанных с решением любой задачи, является вопрос «От чего зависит рассматриваемая в условии искомая или данная величина и от чего она не зависит?» Умение ставить этот вопрос и отвечать на него характеризует способность к функциональному мышлению, проявляющемуся при решении задачи в умении обнаружить связь между данными и неизвестными величинами.

Немаловажную роль в успешном решении задачи играет целенаправленность поиска решения, т.е. сознательное ограничение числа проб и ошибок, характерных для начальной его стадии.

Часто учащиеся не в состоянии самостоятельно проанализировать задачу и решить ее без помощи учителя. В этом случае учитель не должен сообщать решение в готовом виде, следует активизировать мыслительную деятельность учащихся системой подсказок, вспомогательных и наводящих вопросов. Искусство решать задачи основано на хорошем знании теоретической части курса, знание достаточного количества фактов, не входящих в этот курс, владение определенным арсеналом приемов и методов решения геометрических задач. Поэтому представляется полезным выделить некоторое множество задач, в которых формулируется некий факт, достаточно часто используемый в задачах. Соответственно различают два вида опорных задач: задача-факт и задача-метод. Усвоение опорных задач является особенно важным для тех учащихся, которым предстоит внешнее независимое тестирование, огромную роль в выполнении задания которого имеет скорость решения задач.

Опорные задачи-методы

Говоря о методах решения геометрических задач, следует отметить их некоторые специфические особенности: большое разнообразие, взаимозаменяемость, трудность формального описания; отсутствие четких границ области применения. Кроме того, очень часто при решении некоторых задач приходиться прибегать к использованию комбинаций методов и приемов.

На первом этапе решения задачи – построение чертежа - используют некоторые специальные приемы:

- Если в задаче фигурирует одна или несколько окружностей, очень часто сами эти окружности изображать не следует, достаточно ограничиться указанием их центров, точек пересечения или касания с прямыми и друг с другом и проведением соответствующих отрезков прямых. Факт касания окружности с прямой означает равенство соответствующего угла 90^o. Касание окружностей друг с другом означает, что расстояние между центрами равно сумме радиусов окружностей в случае внешнего касания и равно разности радиусов в случае внутреннего касания чертежа без окружностей к задачам про окружности называют «скелетными».
- Дополнительные построения:
  1) продолжение отрезка (отрезков) на определенное расстояние или до пересечения с заданной прямой. [Во многих задачах, связанных с медианой, ее «удвоение» или «удлинение» на треть приносит результат. Например, если в задаче есть медиана треугольника, то удвоение медианы позволит работать с параллелограммами, стороны и одна диагональ которого равны сторонам треугольника, а вторая диагональ равна удвоенной медиане. Тогда нахождение площади и данного треугольника по двум сторонам и медиане, исходящие из одной вершины, к примеру, сведется к определению площади равновеликого ему треугольника по двум сторонам и удвоенной медиане исходного];
  2) проведение прямой через две заданные точки. [Если в условии задачи фигурирует середина одной или нескольких сторон четырехугольника, то стоит добавить середины каких-то других сторон или диагоналей и рассмотреть средние линии соответствующих треугольников – метод «средних линий»];
  3) проведение через заданную точку прямой, параллельной данной прямой. [В трапеции бывает полезно провести через одну вершину прямую, параллельную противоположной боковой стороне. Если в условии говорится о диагоналях трапеции, то стандартным – проведение через одну из ее вершин прямой, параллельной диагонали].
- Метод площадей или метод вспомогательной площади. Основная идея сводится к замене отношения отрезков, расположенных на одной прямой, отношением площадей треугольников с общей вершиной, основаниями которых являются рассматриваемые отрезки. [Задача о биссектрисе треугольника.
- Метод вспомогательной окружности состоит в рассмотрении окружности, не заданной в условии. На рисунке к задаче отыскивается четырехугольник или треугольник, в которой можно вписать или около которого можно описать окружность, а затем используются свойства хорд и диаметров, вписанных углов, углов с вершиной внутри окружности и др.
- Метод геометрических преобразований:
  1) центральная симметрия;
  2) осевая симметрия;
  3) поворот;
  4) гомотетия;
  5) векторный метод;
  6) метод подобия.
- Метод координат является самым универсальным методом геометрии. Главное при решении задач этим методом – удачный выбор системы координат: выбор начала координат и направления осей. Обычно в качестве осей координат выбираются прямые, фигурирующие в условии задачи, а также оси симметрии (если таковые имеются) фигур,

рассматриваемых в задаче. Можно сказать, что желательно, чтобы система координат естественным образом определялась условием задачи.

- Алгебраический метод:

1) метод поэтапного решения;
2) метод составления уравнений. [Доказать, что если диагональ равнобокой трапеции равна большому основанию, то боковая сторона есть средняя пропорциональная между диагональю и разностью оснований].
1) - Тригонометрический метод состоит в применении тригонометрии к решению геометрических задач.

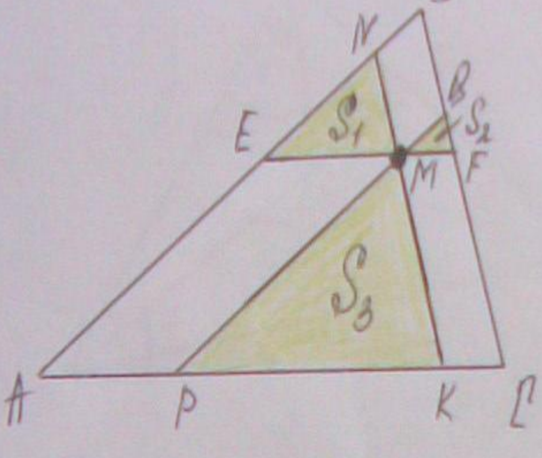
Решение задач на доказательство бывает достаточно сложным: здесь нет стандартных подходов, требуется геометрическая интуиция, оригинальность, изобретательность, независимость мышления. Не всегда возможно легко и быстро извлечь из архивов своей памяти нужный факт и нужный прием. Чем труднее путь, тем приятнее достижение цели.

Желаю Вам творчества!

Примеры решения некоторых задач на доказательство прилагаются

Внутри $\triangle ABC$ выбрана точка M. Через эту точку проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Площади трех образовавшихся треугольников равны S_1, S_2 и S_3. Докажите, что

$$S_{\triangle ABC} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2.$$



$MK \parallel BC$; $BP \parallel AB$; $EF \parallel AC$.

$$S_{\triangle ABC} = S.$$

Образовавшиеся тр-ки подобны $\triangle ABC$. Площади подобных фигур относятся как квадраты коэффициентов подобия:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{EN^2}{AB^2}; \quad \frac{S_2}{S} = \frac{BM^2}{BA^2}; \quad \frac{S_3}{S} = \frac{PM^2}{AB^2}$$

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{EN}{AB}; \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{BN}{AB}; \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{EA}{AB}$$

Складываем полученные равенства

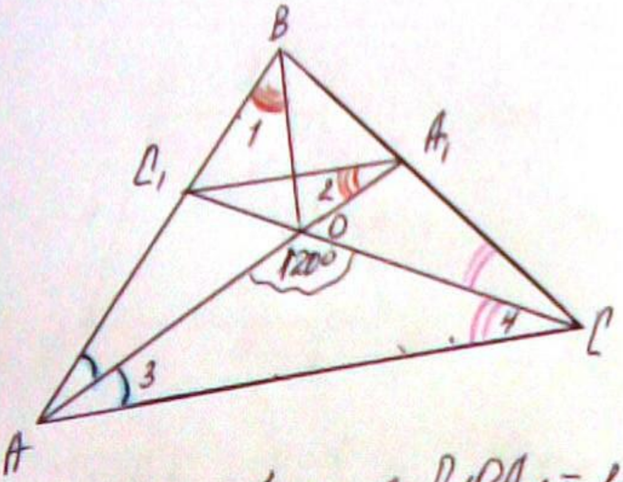
$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{EN + BN + EA}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$$

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = \sqrt{S}$$

$$S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$$

Сб. гор. ат.
11кл. 2002
№ 282 м

В $\triangle ABC$ биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O, $\angle AOC = 120°$. Докажите, что $\angle C_1BO = \angle C_1A_1O$



1. $\angle C_1OA_1 = 120°$, как верт. $\angle AOC$

2. $\angle C_1OA$ – внешний угол $\triangle AOC$

$= \angle 3 + \angle 4 = 180° - 120° = 60°$

3. $\triangle ABC$: $\angle A + \angle C = 2(\angle 3 + \angle 4) = 120°$,
$\angle B = 180° - 120° = 60°$.

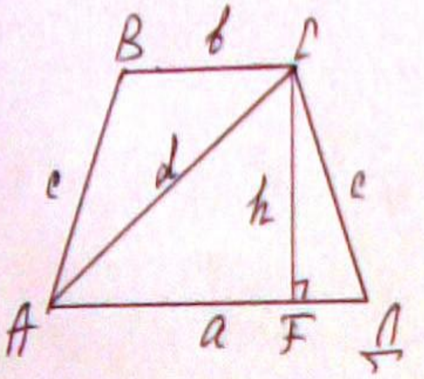
4. 4-к A_1OC_1B: $\angle O + \angle B = 120° + 60° =$
$= 180°$, значит, вокруг него можно описать окружность.

$\angle 1 = \angle 2$ как опирающиеся на одну дугу вписанные углы.

Доказать что если диагональ равнобокой трапеции равна большему основанию, то боковая сторона есть среднее пропорциональное между диагональю и разностью оснований.

$$d = a$$

Док: $c = \sqrt{d(a-b)}$



$$AF = \frac{a+b}{2} \qquad FД = \frac{a-b}{2}$$

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = d^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad \Big| \cdot 4$$

$$4c^2 \cancel{- a^2} + 2ab \cancel{- b^2} = 4a^2 \cancel{- a^2} - 2ab \cancel{- b^2}$$

$$4c^2 = 4a^2 - 4ab$$

$$c^2 = a(a-b) \qquad d = a$$

$$c = \sqrt{d(a-b)}, \text{ ч.т.д.}$$

Доказать что для любого треугольника имеют место соотношения:

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 4S\,\mathrm{ctg}\,\alpha$

$S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4\cdot\frac{1}{2} bc \sin\alpha \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \rightarrow T\cos.$$

вып. для $\forall\Delta$

2) $a^2 = (b-c)^2 + 4S\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$

$$a^2 = b^2 - 2bc + c^2 + 4\cdot\frac{1}{2} bc\, 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} =$$
$$= b^2 + c^2 + 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2bc =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

$T\cos.$

3) $a^2 = (b+c)^2 - 4S\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$

$$a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - 4\cdot\frac{1}{2} bc\, 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$
$$= b^2 + c^2 + 2bc - 4bc\cos^2\frac{\alpha}{2} =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

$T\cos.$

$$S = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} \quad \text{или} \quad S = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}$$

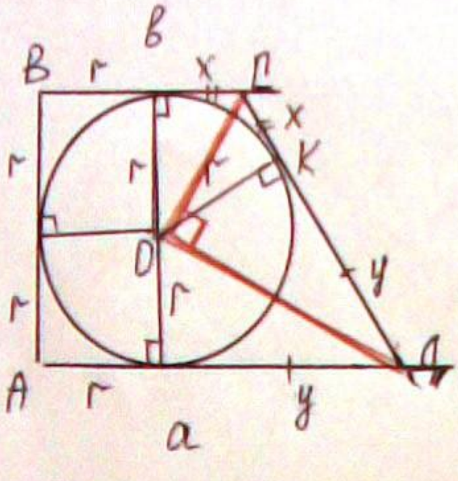
Мерзл. и др.

Г 8 (углубл.) 2008.

с. 193.

29.19.

Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна произведению её оснований.



1. $S_{тр} = \frac{a+b}{2}\cdot h$

$h = 2r$

$S_{тр.} = \frac{r+y+x+r}{2}\cdot 2r = (2r+x+y)r.$ $*$

2. $ab = (r+x)(r+y) = r^2 + rx + ry + xy =$

$= 2r^2 + rx + ry =$

$= r(2r+x+y)$ $*$

$\Delta CODД\ (\angle O = 90^\circ)$

$r = \sqrt{xy}$

$r^2 = xy$

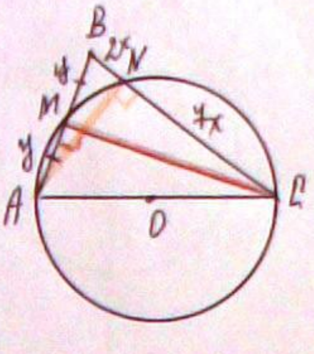
3. $S_{пр.тр.} = ab$, т.д.

|| сказать $S_{\Delta COД} = \frac{1}{2} CO \cdot OД = \frac{1}{2} CД \cdot OK.$

Мерзл. и др.
Г8 (погл.)
с. 145

21.16.

Окружность, построенная на стороне AC $\triangle ABC$ как на диаметре, проходит через середину M стороны AB и пересекает сторону BC в точке N так, что $BN : NC = 2 : 7$. Найти отрезок MN, если $AC = 6$ см.



1. $\angle AMC = 90^\circ$, опир. на диаметр.
$AM = MB$ (по усл.)

$\triangle ABC$: $\underline{AC = BC}$.

2. $2x + 7x = 6$

$x = \frac{2}{3}$

3. $\triangle ABN \sim \triangle CBM$ по двум углам:
$\angle B$ – общий
$\angle ANC$ – опир. на диаметр.

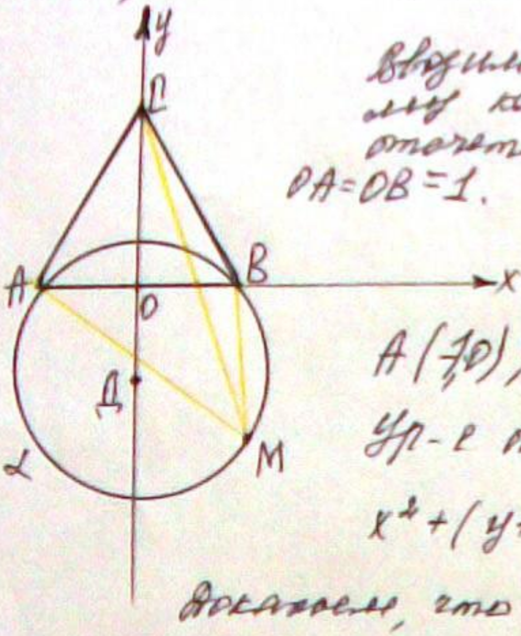
$$\frac{AB}{BN} = \frac{BC}{BM}$$

$$\frac{2y}{2x} = \frac{9x}{y}$$

$y^2 = 9x^2$; $y = 3x$

$y = 3 \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{2\ (см)}}$

Даны равносторонний треугольник и окружность, проходящая через вершины A и B, центр которой симметричен вершине C относительно прямой AB. Доказать, что если M – произвольная точка этой окружности, то из отрезков MA, MB и MC можно составить прямоугольный треугольник (который вырождается, если M = A или M=B).



Введем прямоугольную систему координат с началом отсчета в середине AB.

$OA = OB = 1$.

$AB = BC = AC = 2 = ДB$

$OC = \sqrt{3}$.

$A(-1;0)$; $B(1;0)$; $C(0;\sqrt{3})$; $Д(0;-\sqrt{3})$

Ур-е окружности:

$x^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 4$. $M(m;n) \in \alpha$

Докажем, что $MA^2 + MB^2 = MC^2$.

$MA^2 = (m-(-1))^2 + (n-0)^2 = (m+1)^2 + n^2$

$MB^2 = (m-1)^2 + (n-0)^2 = (m-1)^2 + n^2$

$MC^2 = (m-0)^2 + (n-\sqrt{3})^2 = m^2 + (n-\sqrt{3})^2$

$m^2 + 2m + 1 + n^2 + m^2 - 2n + 1 + n^2 = m^2 + n^2 - 2\sqrt{3}n + 3$

$m^2 + n^2 + 2\sqrt{3}n - 1 = m^2 + (n+\sqrt{3})^2 - 4$

$m^2 + (n+\sqrt{3})^2 = 4$, т.е. $M(m;n)$ удовлетворяет уравнению окружности, а значит $MA^2 + MB^2 = MC^2$, т.е. из отрезков MA, MB и MC можно составить прямоугольный треугольник.